

8. cvičení - Riešenia

Příklad 1 (a) Ukážeme, že limita neexistuje. K tomu uvážíme posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ definované předpisem $x_n = \frac{1}{2n}, n \in \mathbb{N}$ a $y_n = \frac{\pi}{2+2n\pi}, n \in \mathbb{N}$. Pak $x_n \rightarrow 0$ a $y_n \rightarrow 0$. Dále spočítáme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sin \left(\frac{\pi}{x_n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sin(2n\pi) = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$$

a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sin \left(\frac{\pi}{y_n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sin \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

Z Heineho věty nyní vyvodíme, že $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \sin \left(\frac{\pi}{x} \right)$ neexistuje, protože jsme našli dvě posloupnosti $\{x_n\}$ a $\{y_n\}$ konvergující k nule takové, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sin \left(\frac{\pi}{x_n} \right) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sin \left(\frac{\pi}{y_n} \right)$.

Příklad 1 (b) Použijeme Heineho větu na posloupnost $x_n = n \rightarrow \infty$. Počítejme

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x + \cos \frac{3}{x}}}{\sqrt[6]{x^2 + \sin \frac{2}{x}} - \sqrt[3]{x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1 - x - \cos \left(\frac{3}{x} \right)}{\sqrt{x^2 + \sin \left(\frac{2}{x} \right)} - x} \cdot \frac{(x^2 + \sin \left(\frac{2}{x} \right))^{\frac{2}{6}} + (x^2 + \sin \left(\frac{2}{x} \right))^{\frac{1}{6}} x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}}{(x+1)^{\frac{2}{3}} + (x+1)^{\frac{1}{3}} (x + \cos \left(\frac{3}{x} \right))^{\frac{1}{3}} + (x + \cos \left(\frac{3}{x} \right))^{\frac{2}{3}}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos \left(\frac{3}{x} \right)}{x^2 + \sin \left(\frac{2}{x} \right) - x^2} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + \sin \left(\frac{2}{x} \right)} + x}{1} \cdot \frac{x^{\frac{4}{6}} \left(\left(1 + \frac{\sin \left(\frac{2}{x} \right)}{x^2} \right)^{\frac{2}{6}} + \left(1 + \frac{\sin \left(\frac{2}{x} \right)}{x^2} \right)^{\frac{1}{6}} + 1 \right)}{x^{\frac{2}{3}} \left(\left(1 + \frac{1}{x} \right)^{\frac{2}{3}} + \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{\frac{1}{3}} \left(1 + \frac{\cos \left(\frac{3}{x} \right)}{x} \right)^{\frac{1}{3}} + \left(1 + \frac{\cos \left(\frac{3}{x} \right)}{x} \right)^{\frac{2}{3}} \right)} = \\ &\stackrel{\text{AL+VoLSF(P)}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos \left(\frac{3}{x} \right)}{\sin \left(\frac{2}{x} \right)} \cdot \frac{x \left(\sqrt{1 + \frac{\sin \left(\frac{2}{x} \right)}{x^2}} + 1 \right)}{1} \cdot \frac{3}{3} = \\ &\stackrel{\text{AL}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos \left(\frac{3}{x} \right)}{\left(\frac{3}{x} \right)^2} \cdot \left(\frac{3}{x} \right)^2 \cdot \frac{\frac{2}{x}}{\sin \left(\frac{2}{x} \right)} \cdot \frac{x}{2} \cdot x \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{1 + \frac{\sin \left(\frac{2}{x} \right)}{x^2}} + 1 \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos \left(\frac{3}{x} \right)}{\left(\frac{3}{x} \right)^2} \cdot 9 \cdot \frac{\frac{2}{x}}{\sin \left(\frac{2}{x} \right)} \cdot \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{1 + \frac{\sin \left(\frac{2}{x} \right)}{x^2}} + 1 \right) = \\ &\stackrel{\text{AL+VoLSF(P)} + \text{spoj.}}{=} \lim_{y \rightarrow 0^+} \left(\frac{1 - \cos y}{y^2} \right) \cdot 9 \cdot \lim_{y \rightarrow 0^+} \left(\frac{y}{\sin y} \right) \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \stackrel{\text{ZL}}{=} \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 1 = \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

Přičemž limitu výrazu $1 + \frac{\sin \left(\frac{2}{x} \right)}{x^2}$ jsme počítali následujícím způsobem.

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \frac{\sin \left(\frac{2}{x} \right)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \frac{\sin \left(\frac{2}{x} \right)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \frac{\sin \left(\frac{2}{x} \right)}{\frac{2}{x}} \cdot \frac{2}{x^3} = \\ & \stackrel{\text{VoAL} + \text{VOLSf(P)}}{=} 1 + \lim_{y \rightarrow y} \frac{\sin(y)}{y} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x^3} = 1 + 1 \cdot 0 = 1 \end{aligned}$$



Z Heineho věty je tedy i původní limita pro n rovna $\frac{9}{2}$.

Příklad 1 (c) Ukážeme, že limita neexistuje. Uvažme posloupnosti $x_n = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$ a $y_n = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$. Pak x_n konverguje k $\frac{\pi}{2}$ zleva a y_n konverguje k $\frac{\pi}{2}$ zprava. Vypočteme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tan x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \tan \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n} \right) = \infty$$

a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tan y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \tan \left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n} \right) = -\infty.$$

Z Heineho věty tudíž dostáváme, že $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan x$ neexistuje.

Příklad 1 (d) Ukážeme, že limita neexistuje. Uvažujme posloupnosti $x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + n\pi}, n \in \mathbb{N}$ a $y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{4} + n\pi}, n \in \mathbb{N}$. Pak x_n a y_n obě konvergují k 0. Spočítáme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cotan \left(\frac{1}{x_n} \right) = \cotan \left(\frac{\pi}{2} + n\pi \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$$

a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cotan \left(\frac{1}{y_n} \right) = \cotan \left(\frac{\pi}{4} + n\pi \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1.$$

Z Heineho věty dostáváme, že $\lim_{x \rightarrow 0} \cotan\left(\frac{1}{x}\right)$ neexistuje.

Příklad 1 (e) Použijeme Heineho větu pro $x_n = n \rightarrow \infty$. Počítáme tedy

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arcsin \left(\sqrt{x^2 + \sin^2 x} - \sqrt{x^2 - \cos^2 x} \right)}{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}}.$$

Nejdříve upravíme

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arcsin \left(\sqrt{x^2 + \sin^2 x} - \sqrt{x^2 - \cos^2 x} \right)}{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + \sin^2 x} - \sqrt{x^2 - \cos^2 x}}{\sqrt{x^2 + \sin^2 x} - \sqrt{x^2 - \cos^2 x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arcsin \left(\sqrt{x^2 + \sin^2 x} - \sqrt{x^2 - \cos^2 x} \right)}{\sqrt{x^2 + \sin^2 x} - \sqrt{x^2 - \cos^2 x}} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + \sin^2 x} - \sqrt{x^2 - \cos^2 x}}{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}} = \\ &\stackrel{\text{AL}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arcsin \left(\sqrt{x^2 + \sin^2 x} - \sqrt{x^2 - \cos^2 x} \right)}{\sqrt{x^2 + \sin^2 x} - \sqrt{x^2 - \cos^2 x}} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + \sin^2 x} - \sqrt{x^2 - \cos^2 x}}{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}} \end{aligned}$$

Počítáme tedy dvě limity. Spočítejme nejdříve limitu vnitřní funkce první limity:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + \sin^2 x} - \sqrt{x^2 - \cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sqrt{x^2 + \sin^2 x} + \sqrt{x^2 - \cos^2 x}} = 0.$$



Označme $g(x) = \sqrt{x^2 + \sin^2 x} - \sqrt{x^2 - \cos^2 x}$ a $f(y) = \frac{\arcsin y}{y}$. Již jsme spočetli $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$. Snadno ověříme, že pro $x \in (1, \infty)$ je $g(x)$ definována a kladná (speciálně $g(x) \neq 0$), a tedy můžeme použít VoLSF(P). Dostáváme, že

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arcsin \left(\sqrt{x^2 + \sin^2 x} - \sqrt{x^2 - \cos^2 x} \right)}{\sqrt{x^2 + \sin^2 x} - \sqrt{x^2 - \cos^2 x}} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\arcsin y}{y}.$$

Položme nyní $f(x) = \frac{x}{\sin x}$ a $g(y) = \arcsin y$. Pak $\lim_{y \rightarrow 0^+} g(y) = 0$ a g je prostá. Z VoLSF(P) tudíž dostáváme, že

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\arcsin y}{y} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sin x} \stackrel{\text{AL}}{=} \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x}} \stackrel{\text{ZL}}{=} 1.$$

Dále spočítáme druhou limitu:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + \sin^2 x} - \sqrt{x^2 - \cos^2 x}}{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + \sin^2 x - x^2 + \cos^2 x}{x^2 + 1 - x^2 + 1} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x^2 + \sin^2 x} + \sqrt{x^2 - \cos^2 x}} = \\ &\stackrel{\text{AL}}{=} \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \right)}{x \left(\sqrt{1 + \frac{\sin^2 x}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{\cos^2 x}{x^2}} \right)} \stackrel{\text{AL+VoLSF (P)}}{=} \frac{1}{2} \cdot \frac{1+1}{1+1} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Příklad 1 (f) Položme $f(y) = \sqrt{\tan^2 y + 1} \left(\frac{\pi}{2} - y \right)$ a $g(x) = \arctan x$. Pak $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \frac{\pi}{2}$ a zároveň $g(x) \neq \frac{\pi}{2}$ na $(1, \infty)$. Je splněna podmínka (P) VoLSF. Dostáváme

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 1} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} f(g(x)) = \lim_{y \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \sqrt{\tan^2 y + 1} \left(\frac{\pi}{2} - y \right) = \\ &= \lim_{y \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \sqrt{(\tan^2 y + 1) \left(\frac{\pi}{2} - y \right)^2} \end{aligned}$$

Nyní se podíváme na limitu vnitřní funkce. Počítejme

$$\lim_{y \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (\tan^2 y + 1) \left(\frac{\pi}{2} - y \right)^2 = \lim_{y \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\sin^2 y + \cos^2 y}{\cos^2 y} \left(\frac{\pi}{2} - y \right)^2 = \lim_{y \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{\sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - y \right)} \left(\frac{\pi}{2} - y \right)^2.$$

Opět použijeme VoLSF. Položíme $f(x) = \frac{x^2}{\sin^2 x}$ a $g(y) = \frac{\pi}{2} - y$. Pak $\lim_{y \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} g(y) = 0$ a g je prostá. Dle VoLSF(P) tudíž dostáváme

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{\sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - y \right)} \left(\frac{\pi}{2} - y \right)^2 &= \lim_{y \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(g(y)) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{\sin^2 x} \stackrel{\text{AL}}{=} \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 x}{x^2}} \stackrel{\text{AL}}{=} \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x}} \stackrel{\text{ZL}}{=} \frac{1}{1 \cdot 1} = 1. \end{aligned}$$



Příklad 1 (g) Spočítáme prvně limitu vnitřní funkce:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} + \frac{\sin x}{2x} \stackrel{\text{AL+0 krát omezená}}{=} 0.$$

Označme $f(y) = \log y$ a $g(x) = \frac{1}{x} + \frac{\sin x}{2x}$. Právě jsme spočítali, že $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$. Zároveň vidíme, že $g(x) \neq 0$ na $(1, \infty)$. Z VoLSF(P) dostáváme

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(g(x)) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \log y = -\infty.$$

